بررسی الگوی‌های مرز کارآیی میانگین-واریانس پرتفوی تحت تئوری امکان‌پذیر

بهناز قدیمی[۱]
مهرزاد مینویی[۲]
غلامرضا زمردیان[۳]
میرفیض فلاح[۴]

تاریخ دریافت مقاله : ۹۹/۱۱/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله : ۱۴۰۰/۰۱/۰۷

چکیده

از جمله مهم‌ترین مشکلات روش‌های ارائه شده در اندازه‌گیری الگوهای مرز کارآیی پرتفوی، در نظر نگرفتن عدم قطعیت موجود در متغیرهای مالی از جمله ریسک و بازده است. در همین راستا، توسعه نظریه‌های بهینه‌سازی مختلف و استخراج مرز کارآیی بهینه یک پرتفوی در علوم مالی برای درک و شناسایی وجوه عدم اطمینان در محیط تصمیم و پیشامدهای امکان‌پذیر در فضای عدم قطعیت و مبهم بازارهای سرمایه ابداع و توسعه یافته است. از بین نظریه‌های مطروحه در شرایط عدم قطعیت‌ها، می‌توان نظریه امکان را مناسب‌ترین و دقیق‌ترین نظریه در تفسیر و اثبات عدم قطعیت‌ها در بهینه‌سازی سبد سهام به حساب آورد. بنابر همین دلیل در پژوهش پیش رو برای تطابق بیشتر مدل‌های بهینه‌سازی پورتفولیو و شناخت فضای کارآی منطبق با واقعیت، به استخراج بازده و ریسک پرتفوی با استنتاج ریاضی در فضای عدم قطعیت با تأکید تئوری امکان‌پذیر، پرداخته می‌شود. در این پژوهش از مفهوم متغیر تصادفی فازی و نظریهٔ امکان و الزام فازی، به منظور پوشش عدم قطعیت موجود در شناخت و تعیین مرز کارآیی میانگین- واریانس پرتفوی تحت تئوری امکان‌پذیر، استفاده شده است.

کلمات کلیدی

نظریه امکان، میانگین امکان، واریانس امکان، انتخاب پورتفولیو، بهینه سازی

۱- گروه مدیریت مالی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. b.ghadimi2013@gmail.com
۲- گروه مدیریت صنعتی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.(نویسنده مسئول) mminoei2@gmail.com
۳- گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. gh.zomorodian@gmail.com
۴- گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران ، ایران. fallahshams@gmail.com

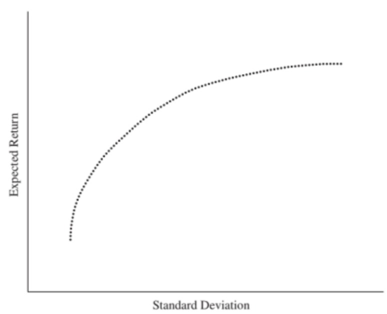
مقدمه

یکی از مشکلات عمده‌ای که بازار سرمایه‌ی اکثر کشورهای دارای اقتصاد نوظهور با آن مواجه هستند، مناسب نبودن تخصیص دارایی است. رفع چنین مشکلی، مستلزم شناخت فرصت‌های مناسب سرمایه‌گذاری با استفاده از ابزارهایی با دقت بیشتر برای پیش‌بینی متغیّرهای ضروری تصمیم‌گیری است. اکثر اوقات عدم موفقیت سرمایه‌گذاران در بازار سرمایه، معلول ناتوانی آن‌ها در انجام پیش‌بینی‌های مناسب از متغیّرهای مربوطه است؛ بنابراین چنانچه با استفاده از ابزارها و یا مدل‌های مناسب بتوانیم متغیّرهای ضروری تصمیم‌گیری را با دقت بیشتری پیش‌بینی کنیم، منابع مالی به گونه‌ای مناسب‌تر هدایت می‌شوند و بازار در جهت کارآیی حرکت خواهد کرد (مشایخ و اسفندی،۱۳۹۴). یکی از ابزارهای مهم و مورد استفاده برای تصمیم‌گیری جهت سرمایه‌گذاری، فنون بهینه‌سازی[۱] می‌باشد. بهینه‌سازی دارایی‌های مالی به صورتی کارآ و مطمئن، یکی از مهمترین موضوعات جدید در مباحث مالی است که با بهره‌گیری از رویکردهای نوین از سایر علوم، سعی در بهبود عملکرد تشکیل سبد دارایی‌ها دارد (رامتین نیا و عطرچی،۱۳۹۷). به عبارتی بهینه‌سازی فرآیندی است که طی آن با توجه به محدودیت‌های موجود در هر تصمیم‌گیری، مطلوب‌ترین توازن میان علایق متضاد مشخص می‌شود (تقی زاده یزدی و همکاران، ۱۳۹۵). گاهی اوقات این تضاد و تقابل میان متغیرهایی مانند ریسک و بازده نمود پیدا می‌کنند، به گونه ای که نقش حیاتی و مهمی در تصمیم‌گیری و انتخاب سبد سهام سرمایه‌گذاری دارد به طوری که اغلب نظریه‌های این حوزه بر پایه این دو مفهوم استوار است؛ در مورد ریسک به عنوان یک متغیر کیفی دیدگاه های مختلفی وجود دارد. گاهی ریسک را هرگونه نوسان احتمالی بازده اقتصادی در آینده و گاهی ریسک را به عنوان هرگونه نوسان احتمالی منفی بازده اقتصادی درآینده تعریف می‌کنند. هری مارکُویتز[۲](۱۹۵۲) با تعریف کمّی ریسک سرمایه‌گذاری، برای سرمایه‌گذاران در امر انتخاب دارایی‌ها و مدیریت پرتفوی[۳]، رویکردی ریاضی ارایه کرد. رویکردی که در توسعه تئوری‌های انتخاب در مکتب مالی[۴] نئوکلاسیک‌ها نقش اساسی ایفا کرده و به طور گسترده به عنوان سنگ بنای مالی کمّی در نظر گرفته می‌شود. وی بر اساس نظریه مدرن پرتفوی[۵]، اذعان کرد متنوع سازی سرمایه‌گذاری‌ها می‌تواند منجر به کاهش نوسان‌ها در عین حفظ متوسط بازده گردد (دای و وانگ[۶]، ۲۰۱۹)، اما مسئله بهینه‌سازی و تعیین مرزکارآیی سرمایه‌گذاری مارکُویتز با پیچیده شدن عوامل تأثیرگذار مانند لزوم برقراری فرضیات زیربنایی، افزایش محدودیت‌های سرمایه‌گذاری در دنیای واقعی و افزایش مشکلات محاسباتی در تشکیل پرتفوی بهینه با چالش‌هایی مواجه می‌شد؛ بنابراین تلاش‌های زیادی به صورت تئوری و عملی در زمینه بهبود مدل استاندارد میانگین- واریانس مارکُویتز انجام گرفته است. معیارهای ریسک متعددی از قبیل مدل نیمه

واریانس، مدل میانگینِ قدر مطلق انحراف و مدل واریانس با چولگی پیشنهاد شد (فالگا[۷]،۲۰۱۶). در این راستا آنچه مسلم است، مدل میانگین- واریانس مارکُویتز که می‌توان آن را به عنوان پارادایمی در حوزه سرمایه‌گذاری در نظر گرفت، در واقع یک مدل انتخاب پرتفوی احتمالی است؛ مدل هایی که بازده اوراق بهادار را به صورت متغیرهای تصادفی در نظر گرفته و بدین ترتیب به طور گسترده‌ای به وسیله رویکردهای برنامه‌ریزی احتمالی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند. در این مقاله سعی بر آن است تا با ارائه مروری بر مبانی و الگوهای ارائه شده در خصوص تعیین مرزکاراَ، بتوان نرخ بازده دارایی‌ها را با توزیع امکان و نه توزیع احتمال بیان کرد. بر این اساس، مدل میانگین- واریانس احتمالی مارکُویتز به مدلی مبتنی بر معیار امکان تبدیل شده و موجب جایگزینی شاخص‌های احتمالی با شاخص‌های مبتنی بر امکان می‌شود.

مرز کارآیی تحت میانگین-واریانس

مرز کارآیی میانگین- واریانس در تئوری‌های مالی به شکل نموداری ظاهر می‌شود که محور افقی آن انحراف استاندارد و محور عمودی آن بازده مورد انتظار پرتفوی را تشکیل می‌دهد. شکل‌گیری مرز از اتصال نقاطی تشکیل شده است که در نهایت یک منحنی پیوسته بوجود آمده و یک شمای کلی از مرز مؤثر میانگین- واریانس مارکُویتز را ارائه می‌دهد (رهنمای رودپشتی و همکاران،۱۳۹۴).



شکل۱- نمایش نقطه‌ای مرز کارآیی مسئله مارکُویتز

بسیاری مقاله معروف مارکُویتز (۱۹۵۲) را آغاز ورود جدی ریاضیات و آمار به حوزه مالی و کمّی شدن مباحثی همچون ریسک و بازده دانسته و آن را شروع تحلیل مدرن پورتفولیو بر می‌شمارند (گوپتا [۸]و همکاران، ۲۰۰۸). روش میانگین- واریانس مارکُویتز نقش مهمی در توسعه‌ی نظریه‌ی انتخاب نوع دارایی ایفا کرد. مارکُویتز کسی بود که مفهوم تنوع بخشی[۹] در سبد سهام را معرفی کرد و آن را توسعه داد. او به طور کلی نشان داد که چگونه تنوع بخشی در سبد سرمایه، ریسک آن را برای سرمایه

گذار کاهش می‌دهد که در نهایت فرآیند فوق منجر به تشکیل سبدهای کاراً می‌شود که اصطلاحاً مرز کارآیی میانگین- واریانس نامیده می‌شود (بیات و اسدی،۱۳۹۶)؛ اصول کلیدی مدل میانگین-واریانس استفاده از بازده موردانتظار پورتفولیو به عنوان بازده سرمایه‌گذاری و استفاده از واریانس بازده پورتفولیو به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری است. نکته حائز اهمیتی که در محاسبه ریسک وجود داشت این بود که در این مدل انحرافات کوچکتر و بزرگتر از میانگین، به طور یکسان در نظر گرفته می‌شدند و در این شرایط، واریانس معیار ریسک متقارن می‌باشد (سان[۱۰] و همکاران،۲۰۱۶). اما سرمایه‌گذاران در دنیای واقعی، انحرافات کوچکتر از میانگین را نامطلوب در حالیکه انحرافات بزرگتر از میانگین را مطلوب می‌دانند یعنی در مواردی که توزیع بازده سهام نامتقارن[۱۱] است، مدل میانگین – واریانس رفتار پورتفولیو را به طرز نامطلوبی پیش‌بینی می‌کند که در اندازه گیری ریسک ناکارآمد است. بنابراین مارکُویتز معیار دیگری بنام معیار نیمه واریانس توسط رُی (۱۹۵۲) بسط داده شده بود را به عنوان معیار جایگزین برای محاسبه ریسک، در مدل استاندارد خود مورد توجه قرارداد. (ورکا و برموذز[۱۲]،۲۰۱۵). ایده مارکُویتز در روش میانگین- واریانس توسط بسیاری از محققین نظیر شارپ[۱۳]، موسین و لینتنر [۱۴] مورد استفاده قرار گرفت. (کولم[۱۵] و همکاران،۲۰۱۴). بنابراین با توجه به این واقعیت که مفهوم مرز از زمان مارکُویتز وجود داشت، مدل وی نقطه شروع برای بسیاری از مدل‌ها شد؛ از جمله مدل‌هایی که بتوانند یک مجموعه قوی از رویکردها را ارائه دهند و مسائلی نظیر مسائل مقیاس بزرگ را که در حال حاضر با فراوانی بیشتری در حال ظهور هستند را بهینه‌سازی کنند. با وجود داده‌هایی که در حال حاضر در مورد اوراق بهادار در سرتاسر جهان وجود دارد، سرمایه‌گذاران اغلب آزاد هستند که فرصت‌های متعدد برای ایجاد ارزش افزوده در پورتفولیوهای خود را در نظر بگیرند. در ادامه ابتدا به بررسی مدل مارکُویتز و بعد به بررسی روش‌های مختلفی که با استفاده از آنها مرزهای کاراً را می‌توان نشان داد پرداخته می‌شود. مسئله‌ی مارکُویتز که سعی دارد واریانس را به حداقل برساند و به طور همزمان بازده موردانتظار را حداکثر کند، در فرمت دو معیاری به صورت زیر بیان شده است :

$$\begin{gathered} min\ \ X^T \sum X \qquad\qquad : \ variance \\ max \quad \mu^t X \qquad\qquad : \ expected\, return \\ s.t. \qquad 1^t\ x = 1 \\ \alpha \le x \le \omega \end{gathered}$$

در رابطه‌ی فوق داریم $X \in R^n$ و n تعداد اوراق بهاداری است که در یک پورتفولیو قرار می‌گیرند و مؤلفه‌های xi مربوط به x نسبت سرمایه‌ای هستند که باید در مرحله اولیه اوراق بهادار i اختصاص یابند.

همچنین Σ ماتریس کواریانس n*n مسئله است و μ بردار بازده مورد انتظار اوراق بهادار، محدودیت $s.t.\ 1^t\ x = 1$ تضمین می‌کند که مجموع تمامی نسبت‌های xi برابر با یک است و معادله $\alpha \leq x \leq \omega$ ناحیه‌ی نگهدارنده برای محدودیت‌های خطی اضافی است (در اینجا تنها مرزهای بالا و پایین روی xi).

با پردازش بیش از یک معیار، مسئله دو ناحیه‌ی ممکن دارد یعنی $S \subset R^n$ و $Z \subset R^2$. S مجموعه تمام پورتفولیوهای ممکن است که در آن $X \in R^n$ است اگر معادله‌ی $s.t.\ 1^t\ x = 1$ برقرار باشد امکان پذیر و اگر معادله $\alpha \leq x \leq \omega$ برقرار باشد؛ Z مجموعه تمامی بردارهای تصویر (از نظر انحراف معیار و بازده مورد انتظار) پورتفولیو در S است. حال $X \in S$ یک پورتفولیوی مؤثر است با توجه به بردار تصویر، بدون اینکه بازده مورد انتظار کوچکتر یا بازده مورد انتظار بزرگتر بدون انحراف معیار بالاتر وجود داشته باشد، مجموعه تمام بردارهای تصویر (از نظر انحراف معیار و بازده مورد انتظار) تمامی پورتفولیوهای مؤثر، مرز کاراَ را تشکیل می‌دهند.

کارآیی میانگین-واریانس با استفاده از روش پارامتر-λ

یک روش دیگر برای بدست آوردن بازنمایی نقطه‌ای مرز کاراَ آن است که از روش پارامتر λ استفاده شود.

$$\min_{x \in s}\ X^T \sum X - \ \lambda\, \mu^t x \qquad \lambda\{o, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{q-1}, \lambda_{max}\}$$

در این مدل هر چقدر مقدار λ بزرگتر باشد، واریانس نقطه‌ی تولید شده در مرز کاراَ (از این رو بازده مورد انتظار) بزرگتر است. اگرچه روش پارامتر λ مشابه روش محدودیت دامنه‌ای است و تنها به نرم‌افزار QP استاندارد نیاز دارد، با این حال کارکردن با این روش دشوارتر از کار با روش محدودیت دامنه‌ای است (استوئر و همکاران،۲۰۱۱). در معادله فوق با توجه به مقدار $\lambda = o$ حل نقطه واریانس حداقل مسئله کاملاً مشخص، اما برای حل نقطه بازده مورد انتظار حداکثر در مرز کاراَ سردرگمی بوجود می آید. این امر به دلیل آن است که راه حل ساده‌ای برای دانستن λ_{max} از قبل وجود ندارد (که در آن λ_{max} کوچکترین مقدار λ است که به طور یکنواخت نقطه بازده مورد انتظار حداکثر روی مرز کاراَ را محاسبه می‌کند). در برخی موارد، λ_{max} می‌تواند نزدیک به بی‌نهایت باشد. در سایر موارد، باید عددی کوچکتر از یک باشد. بنابراین راهی برای شناخت قبلی آن وجود ندارد و ممکن است هنگام انتخاب مقادیر برای λ مرز کاراَ، بالا و یا خیلی پایین برآورد شود؛ در صورتی که با استفاده از روش محدودیت دامنه‌ای از قبل می‌شود مؤلفه‌های بازده مورد انتظار هر نقطه‌ی تولید شده را مشخص کرد، اما با روش پارامتر λ، نمی‌دانیم

که آیا هر مؤلفه پس از بهینه‌سازی، مقدار بالایی دارد یا خیر؛ بنابراین با توجه به فاصله‌گذاری تولید شده در امتداد مرزهای‌کارآمد، روش پارامتر λ می‌تواند ناامید کننده باشد(یو و وانگ،۲۰۱۷).

کارآیی میانگین-واریانس تحت رویکردهای پارامتریک

در انتخاب پورتفولیو، هدف رویکرد پارامتریک[۱۶] محاسبه‌ی منحنی پیوسته‌ی کامل مرز کارآ است. در رویکرد پارامتریک، مسئله با یک پارامتر به گونه‌ای مدل‌سازی شده است که با تغییر آرام پارامتر، مرز کارآیی کلی به طور دقیق ردیابی می‌شود (استوئر و هرسبرگر[۱۷]،۲۰۱۰). الگوریتم اول برای انجام این کار روش مسیر بحرانی مارکُویتز است. روش مسیر بحرانی[۱۸] که نوعی از برنامه‌ریزی درجه دوم پارامتریک است، انتخاب پورتفولیو را از دیدگاه فرمول زیر بررسی می کند :

$$\min \ X^T \sum X$$
$$s.t. \ \ \mu^t \mathrm{x}=\rho \quad p \in \{p_{min}, p_{max}\}$$
$$x \in s$$

در رابطه‌ی فوق ρ به طور پیوسته در فاصله‌ی$\left[\rho_{min} \text{ و } \rho_{max}\right]$ مقادیر بازده مورد انتظار مرز کاراً تغییر می‌کند. اگرچه سایر ایده‌های مارکُویتز به موفقیت‌های قابل توجهی رسیده بود، ولی روش مسیر بحرانی او که «معمای» عرصه‌ی مالی مدرن توسط میشائود[۱۹] (۱۹۸۹) نامیده شده است، به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار نگرفت. در واقع به غیر از بست[۲۰](۱۹۹۶)، استین[۲۱] و همکاران (۲۰۰۸) هرسبرگر[۲۲] و همکاران(۲۰۱۰) رویکردهای برنامه‌ریزی درجه دوم پارامتریک مبتنی بر فرمول زیر

$$\min \ X^T \sum X - \lambda\mu^T \quad \lambda \in [O, +\infty)$$
$$x \in s$$

که توسط (اوبردیک[۲۳] و همکاران، ۲۰۱۶) ارائه شده است، مطالعات اندکی بوده‌اند که به رویکردهای پارامتریک برای محاسبات مرزی کاراً در چهار دهه‌ی گذشته اشاره کرده‌اند. روش پارامتر λ را می‌توان پیاده‌سازی گسسته معادله فوق دانست(لی و همکاران،۲۰۱۸).

کارآیی میانگین-واریانس تحت تئوری امکان پذیر

در دنیای تئوریک مسائل بهینه‌سازی مارکُویتز، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل دارای قطعیت هستند؛ اما واضح است که برای به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها فرض صحیحی نیست. به این دلیل که: برخی از داده های ورودی (مثل تقاضا برای یک کالای خاص در مسائل تولیدی و یا بازده دارایی ها در مسائل مالی)؛ در زمانی که مسأله مورد تحلیل قرار

می‌گیرد موجود نیستند و باید پیش‌بینی شوند. مقدار حقیقی پارامتر مورد نظر می‌تواند از مقدار پیش‌بینی شده نوسان کند. این داده‌ها، در برگیرنده خطای پیش‌بینی هستند. برخی از داده‌های ورودی (مثل پارامترهای مربوط به فرآیندهای تکنولوژیکی) نمی‌توانند به طور دقیق مورد اندازه‌گیری قرار گیرند. در واقع، این پارامترها حول یک مقدار اسمی نوسان می‌کنند. این داده ها، در برگیرنده خطای اندازه‌گیری هستند. در مسأله بهینه‌سازی پرتفوی اگر بازده واقعی دارایی‌ها نسبت به مقدار تخمین زده شده (پارامترهای مدل) نوسان کنند، جوابی که به عنوان جواب بهینه برای مسأله ارائه شده است ممکن است حتی از محدوده جواب‌های موجه خارج شود (فلاح پور و تند نویس،۱۳۹۳)؛ بنابراین رفتار بازار مالی نیز تحت تأثیر عوامل غیراحتمالاتی متعددی چون ابهام و عدم قطعیت[۲۴] قرار می‌گیرد. در این موارد، نیاز است که توزیع احتمال دقیقی بدست آورده شود. گاهی اوقات، مقادیر برآورد شده برای احتمالات ممکن است دقیق نباشند؛ در این شرایط اگر آن‌ها را به عنوان مقادیر واضح در نظر بگیریم، از نظر عملی غیر مفید واقع می‌شوند (لی و همکاران،۲۰۱۸). بنابراین تعدادی از محققین به این نتیجه رسیدند که می‌توانند از نظریه مجموعه فازی برای مدیریت پورتفولیو در نوع دیگری از محیط نامشخص به نام محیط فازی استفاده کنند. ابتدا توسط زاده (۱۹۶۵)، و بعد ها واتادا[۲۵] (۱۹۹۷) و لئون[۲۶] و همکاران (۲۰۰۲) انتخاب پورتفولیو را با استفاده از نظریه تصمیم فازی مورد بحث قرار دادند. لاکانینا و پکورلا[۲۷] (۲۰۰۶) یک مسئله فازی محدودیت‌های نرم تصادفی چند مرحله‌ای توسعه دادند تا عدم قطعیت و عدم دقت را برای حل مسائل مدیریت پورتفولیو در نظر بگیرند. لین[۲۸] و همکاران (۲۰۰۵) یک رویکرد سیستماتیک اتخاذ کردند و برای این منظور تئوری نظریه فازی را همراه با ماتریس‌های پورتفولیو به کار گرفتند تا به مدیران کمک کنند که به درک بهتری از ماهیت رقابتی کلی پورتفولیوهای کسب و کار آن ها برسند. بر این اساس، مدل میـانگین- واریـانس احتمـالی مارکُویتز به مدلی مبتنی بر معیار امکان بدل گشته، که موجب جایگزینی شاخص‌های احتمالی به وسیله شاخص‌های مبتنی بر امکان می‌گردد؛ به نحوی که ارزش مورد انتظار بـازده مبتنـی بـر امکان، برابر سطح معینی خواهد شد و واریانس مبتنی بر امکان نیز حداقل خواهد گشت (جرجسکا و کینانن[۲۹]،۲۰۱۱). در این مقاله ما دو نـوع مدل‌سازی پورتفولیو را بر اساس واریانس‌ها و میانگین های تصادفی حدود بـالا و پـایین میانگین و واریانس احتمالاتی بالا و پایین مورد بحث قرار می‌دهیم.

کارآیی مدل میانگین – واریانس تحت فضای امکان پذیر بالا و پایین

ابتدا جهت تشریح کارآیی مدل میانگین- واریانس تحت فضای امکان پذیر بالا و پایین[۳۰] به معرفی اجمالی از یک فضای فازی پرداخته می‌شود. یک عدد فازی A مجموعه فازی از اعداد حقیقی R با توابع

عضویت پیوسته، محدب فازی نرمال با حمایت محدود است. خانواده اعداد فازی باF نمایش داده می‌شوند (لی و همکاران،۲۰۱۳) میانگین احتمالاتی بالا و پایین عدد فازی A را با مجموعه سطح گاما به صورت زیر بیان می‌کنند (چن و سور[31]،۲۰۱۶).

$$[A]^{\gamma} = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)](\gamma > 0)$$

$$M_{*(A)} = \frac{\int_0^1 Pos[A \le a_1(\gamma)]a_1(\gamma)d_y}{\int_0^1 pos[A \le a_1(\gamma)]\, d_y} = \int_0^1 Y_{a1}\,(\gamma)d_y$$

و

$$M^{*}{}_{(A)} = \frac{\int_0^1 Pos[A \ge a_2(\gamma)]a_2(\gamma)d_y}{\int_0^1 pos[A \ge a_2(\gamma)]\, d_y} = \int_0^1 Y_{a2}\,(\gamma)d_y$$

به این ترتیب pos نشانگر امکان‌پذیر بودن است(چن و سور،۲۰۱۶).

$$Pos[A \le a_1(y)] = \prod((-\infty, a_1(y)]) = y,$$

$$Pos[A \ge a_2(y)] = \prod\big([a_2(y), \infty)\big) = y_0$$

استنتاج تحلیلی از مرز کارآی امکانی

مشابه با روش میانگین- واریانس مارکُویتز، مدل میانگین - واریانس امکانی پایین برای انتخاب پورتفولیو معادله۱ و مدل میانگین - واریانس امکانی بالا برای انتخاب پورتفولیو معادله۲ را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد (ورکا و همکاران،۲۰۰۷).

معادله ۱:

$$\begin{gathered} min \quad Var_*(r) = x' \, Cov_* x \\ s.t. \quad M_*' X \ge \mu, \\ F' x = 1, \\ X \ge L. \end{gathered}$$

معادله ۲:

$$\begin{gathered} min \quad Var^*(r) = x' \, Cov^* x \\ s.t. \quad M^{*\prime} X \ge \mu, \\ F' x = 1, \\ X \ge L. \end{gathered}$$

حال برای تحلیلی از مرز کارآی امکانی مسئله عمومی زیر را در نظر می گیریم:

معادله۳:

$$\begin{aligned} &min \quad x^{\prime}Cx \\ &s.t. \quad M^{*\prime}X \geq \mu, \\ &F^{\prime}x = 1, \\ &X \geq L. \end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق داریم$M^{\prime} = (m_1, 000, m_n)$ و $C = (C_{ij})_{n\times n}$. به سادگی می‌توان دید که معادله۳ معادل با معادله۱و ۲ است به شرطی که (C,M) با $(Cov^*, m^*)$$(Cov_*, m_*)$جایگزین شود. بنابراین کافی است که راه‌حل بهینه برای معادله ۳ بدست آید. چناچه فروش‌های کوتاه مدت [۳۲]مجاز نباشند آنگاه x≥0 است. در این صورت، مرز کاراَ متشکل از سری کمان‌های به طور فزآینده یکنواخت سهموی محدب در صفحه بازده - واریانس است. در این مقاله الگوریتمی ارائه می‌شود که بیان تحلیلی برای مرز کاراَ امکانی ارائه می‌دهد. الگوریتم، مبتنی بر فرض زیر است(سابوردا و همکاران[۳۳]،۲۰۱۶)

فرض (الف): حداقل یک زوج ایندکس $i, j \in \{1, \dots, n\}$ با $i \neq j$وجود دارد به گونه‌ای که $m_i \neq m_j$و در آن داریم $M = (m_{1}, \dots, m_n)^{\prime}$.

فرض (ب): $C = (C_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت است.

اگر فرض شود $e = M^{\prime}C^{-1}M, f = F^{\prime}C^{-1}F, d = M^{\prime}c^{-1}\sigma = ef - d^2$ وجود دارد؛ حالت زیر را می‌توان یافت (سابوردا و همکاران،۲۰۱۶).

لم1-4: با در نظر گرفتن اینکه فرض(الف) برقرار است، آنگاه داریم: $(i)e > o , f > o, (ii)\sigma > o$

بنابراین قبل از حل معادله ۳ روش مفید آن است که مسئله‌ی زیر در نظر گرفته شود(سابوردا و همکاران،۲۰۱۶).

معادله ۴:

$$\begin{aligned} &min \quad x^{\prime}Cx \\ &s.t. \quad M^{\prime}X \geq \mu, \\ &F^{\prime}x = 1. \end{aligned}$$

در قسمت بعدی، راه حل بهینه بین معادله ۳و ۴ نشان داده خواهد شد.

نظریه 1-4 با درنظرگرفتن اینکه فرض (ب) برقرار است و متغیر μ ثابت باشد. اگر $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\prime}$ راه‌حل بهینه برای معادله ۴ با $x_{i1}^* < l_{i1,0000, x_{ik}^* < l_{ik}}$ و $x_i^* \geq l_j$ برای $j \in$

$\{1,\ldots\ldots,n\}\backslash\{i_{1,\ldots\ldots,i_k}\}$ باشد و اگر $x^{1*}=(x_1^{1*},\ldots\ldots,x_n^{1*})'$ یک راه‌حل بهینه برای معادله ۳ باشد، آنگاه داریم:

$$x^{1*}\in\bigcup_{s=1}^{k}\left\{x=(x_{1,\ldots\ldots,}x_n)'\mid x_{is}=l_{is},x_i\geq l_i,i\neq i_s,1\leq i,i_s\leq n\right\}$$

اثبات: حالت مخالف این است که $x_{is}{}^{1*}\neq l_{is}$ را برای همه $s=1,\ldots\ldots,k$ در نظر گرفته شود، آنگاه $x_{is}{}^{1*}>l_{is}$ برای همه‌ی $s=1,\ldots\ldots,k$ و $x_j{}^{1*}\geq l_j$ برای همه‌ی $j\neq i_s, s=1,\ldots\ldots,k$ برقرار است.

فرض (ب) تضمین می‌کند که $\sigma^2(x)=x'Cx$یک تابع به شدت محدب برای x است. برای $t\in[o,1]$، $x^{**}(t)=tx^{1*}+(1-t)x^*$ را تعریف می کند اگر فرض شود داشته باشیم$F(t)=\sigma^2(tx^{1*}+(1-t)x^*)$ پس از نظریه‌های ارائه شده مشخص می‌شود که $F(t)$ یک تابع به شدت محدب در $[o,1]$ است. از آنجاییکه ناحیه‌ی ممکن معادله۴ محدب است $x^{**}(t)=(x_1{}^{**}(t),\ldots\ldots,x_n{}^{**}(t))'$ یک راه حل ممکن برای معادله۴ برای همه $[o,1]\in$ است. بهینگی x* به معنی آن است که :

$$F(O)=\sigma^2(X^*)<\sigma^2(tx^{1*}+(1-t)x^*)=F(t),for\ all\ t\in(0,1]$$

در نتیجه F(t) یک تابع افزایشی در [0,1] است.

لم 2-4: نشان می دهد که تحت محدودیت $x\geq L$ و $F'=1$، بازده امکانپذیر ماکزیمال که یک سرمایه‌گذار می‌تواند به آن برسد $\left(1-\sum_{j=1}^{n}l_j\right)\mathrm{Max}\{m_i,1\leq i\leq n\}+\sum_{i=1}^{n}l_im_i$ است.

اثبات: اگر فرض شود $Z_i=(x_i-l_i)\left(1-\sum_{j=1}^{m}l_j\right)^{-1},i=1,\ldots\ldots,n$آنگاه داریم :

$$max\{M'x|F'=1,X\geq L\}$$

$$max\left\{\left(1-\sum_{j=1}^{n}l_j\right)\sum_{i=1}^{n}z_im_i+\sum_{i=1}^{n}l_im_i|\sum_{i=1}^{n}z_i=1,z_i\geq o\right\}$$

$$=\left(1-\sum_{j=1}^{n}l_j\right)max\left\{\sum_{i=1}^{n}z_im_i+|\sum_{i=1}^{n}z_i=1,z_i\geq o\right\}+\sum_{i=1}^{n}l_im_i$$

$$=\left(1-\sum_{j=1}^{n}l_j\right)max\{m_i,\leq i\leq n\}+\sum_{i=1}^{n}l_im_i,$$

که اثبات نظریه را به پایان می‌رساند. لم 2-4 تحت محدودیت $F'x=1\ and\ x\geq L$ بازده‌ی امکان‌پذیر ماکزیمال که یک سرمایه‌گذار می‌تواند به آن برسد را به خوبی نشان می‌دهد.

مطابق با تبدیل متغیر $Y = X - L$، مسئله ۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

معادله۵:

$$\begin{aligned} &min \quad y^{\prime}Cy + 2y^{\prime}CL + L^{\prime}CL \\ &s.t. \quad M^{\prime} \geq \mu - M^{\prime}L, \\ &F^{\prime}y = 1 - F^{\prime}L, \\ &y \geq o, \end{aligned}$$

و مسئله‌ی ۳را می‌توان به صورت مشابه به طور زیر بازنویسی کرد:

معادله۶:

$$\begin{aligned} &min \quad y^{\prime}Cy + 2y^{\prime}CL + L^{\prime}CL \\ &s.t. \quad M^{\prime}y \geq \mu - M^{\prime}L, \\ &F^{\prime}y = 1 - F^{\prime}L. \end{aligned}$$

نتیجه‌ی زیر به سادگی از نظریه1-4بدست می‌آید.

اگر فرض شود فرض (ب) برقرار باشد و μ ثابت باشد. اگر $y^* = (y_1{}^*, \ldots, y_n{}^*)^{\prime}$ یک راه حل بهینه برای معادله۶ با $y_{i1}{}^* < o, \ldots, y_{ik}{}^* < o$ و $y_i{}^* \geq o^*$برای $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$ باشد و اگر $y^{1*} = (y_1{}^{1*}, \ldots, y_n{}^{1*})^{\prime}$ یک راه حل بهینه برای معادله۵ باشد، آنگا ه داریم :

$$y^{1*} = \in \bigcup_{s=1}^{k} \{ y = (y_1, \ldots, y_n)^{\prime} | y_{is} = o, y_i \geq o, i \neq i_s, 1 \leq i, i_s \leq n \}$$

علاوه بر این، می‌توان عبارت صریح را برای راه حل بهینه معادله۶ بدست آورد.

نظریه 2-4 مطابق فرض های بیان شده ، راه حل بهینه برای معادله ۶به صورت زیر است:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{f} c^{-1} F - L & if \quad \mu \leq \frac{d}{f}, \\ \frac{1}{\sigma} C^{-1} [eF - dM + (fM - dF) - L] & if \quad \mu \leq \frac{d}{f}. \end{cases}$$

اثبات: از آنجاییکه C یک ماتریس مثبت معین است معادله۶ یک مسئله برنامه‌ریزی محدب سخت است. مطابق با نظریه برنامه‌ریزی محدب، می‌دانیم شرایط کاراَ و لازم برای آنکه $y \in R^n$راه‌حل بهینه یکنواخت برای معادله ۶ باشد آن است که y نقطه Kuhn-Tucker باشد. به این ترتیب حل مسئله۶ معادل با پیدا کردن y و $\lambda_i \in R, i = 1$ است (سابوردا و همکاران،۲۰۱۶).

معادله۷:

$$\begin{gathered} CL + Cy = \lambda_1 F + \lambda_2 M, \\ M' \geq \mu - M'L, \\ F' = 1 - F'L, \\ \lambda_2 (M'y - \mu + M'L) = O, \lambda_2 \geq O. \end{gathered}$$

اگر $\mu \leq d|f$ آنگاه $\lambda_1 = \frac{1}{f}, \lambda_2 = o$ بوده و $y = \frac{1}{f} c^{-1} F - L$ معادله ۷ را تقویت می‌کند.

واگر $\mu > d|f$ آنگاه $\lambda_1 = \frac{(e-d_\mu)}{\sigma}, \lambda_2 = (f_\mu - d)/\sigma > o$ بوده و $y = \frac{1}{\sigma} c^{-1} [eF - dM + (fM - dF)\mu] - L$ معادله ۷را تقویت می‌کند.

بنابراین اثبات نظریه به اتمام می‌رسد(سابوردا و همکاران،۲۰۱۶)

معادله۸:

$$y_k = \frac{1}{\delta} [eg_k - da_k + (fa_k - dg_k)\mu] - l_{k,} k \in I.$$

مطابق معادله ۹ از آنجاییکه $\delta > O$ و $\sum_{k=1}^{n} y_k = F'y = 1 - \sum_{k=1}^{h} l_k$ برقرار است، باید $h \in I$ و $P \in I$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $fa_h - dg_h < o$ و $fa_p - dg_p > o.$ برقرار باشد.

معادله۹:

$$\begin{gathered} \min \quad y_1' c_1 y_1 + 2 y_1' \overline{c_1} L + L' + CL \\ s.t\ M_1' y_1' \geq \mu\ M'L, \\ F_1' y_1 = 1 - F'L, \\ y_1 \geq O, \end{gathered}$$

از آنجاییکه معادله ۹ ساختار مشابه معادله۵ را دارد، روش فوق را می‌توان به طور مشابه برای حل مسئله۹ استفاده کرد. علاوه بر این اگر $y_1^* = (y_1^*, \ldots\ldots, y_{p+1}^*, \ldots y_n^*)'$ یک راه حل بهینه برای مسئله۹ باشد آنگاه داریم: $y_1^* = (y_1^*, \ldots\ldots, y_{p-1}^*, o, y_{p+1}^*, \ldots y_n^*)'$ که یک راه حل بهینه برای مسئله۵ است.

برای معادله (۶) باید رابطه‌ی زیر را تقویت کند.

معادله۱۰:

$$y_p = \frac{fa_q - dg_q}{fa_p - dg_p} y_p.$$

با توجه به این معادله y_q را می‌توان با عبارت y_p در معادله ۶ توصیف کرد. طبیعی است که هر

دو مقدار y_q و y_pرا در معادله ۵ برابر با صفر قرار دهیم. بنابراین رویکرد راه حل فوق را همچنان می‌توان استفاده کرد و یک راه حل مرکزی حذف می‌شود. (مسییل و همکاران،۲۰۱۷).

در حالیکه (ژانگ و همکاران ،۲۰۱۳)واریانس امکانی یک عدد فازی A و کواریانس امکان بین اعداد فازی A, B را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$\overline{Var}(A) = \frac{Var_*(A) + Var^*(A)}{2}$$

$$\overline{Cov}(A,B) = \frac{Cov_*(A,B) + Cov^*(A,B)}{2}$$

اگر این تعاریف با معادله۱ ما انطباق یابند، مدل انتخاب پورتفولیوی زیر را بدست می‌آوریم:

معادله۱۱:

$$\begin{gathered} min\, \overline{Var} = x^{\prime}\overline{Cov}x \\ s.t \quad \overline{M}^{\prime} \geq \mu,^{\prime} \\ F^{\prime}x = 1, \\ X \geq L, \end{gathered}$$

که در آن داریم:

$$\overline{M}=\frac{1}{2}[M_* + M^*], \overline{Cov} = \frac{1}{2}[Cov_* + Cov^*].$$

مدل میانگین-واریانس امکانی پایین معادله۱ مبتنی بر میانگین وزن‌دار امکانی حداقل $y - cuts$ روی بازده دارایی است که مطابق با رویکرد سرمایه‌گذار است که انتخاب پورتفولیوی خود را به صورت بدبینانه انجام می‌دهد. از سوی دیگر، مدل میانگین-واریانس امکان بالا در معادله۲مبتنی بر میانگین وزن‌دار امکان و ماکزیمم $y - cuts$ روی بازده دارایی است که مطابق با رویکرد سرمایه‌گذاری است که انتخاب پورتفولیوی خود را به صورت خوشبینانه انجام می‌دهد. بین دو این طیف، مدل میانگین-واریانس امکان در معادله ۱۱ را می‌توان برای پوشش سناریویی استفاده کرد که در آن سرمایه‌گذار، انتخاب پورتفولیوی خود را نه خیلی بدبینانه و نه خیلی خوش بینانه انجام می‌دهد(لاکوراس و همکاران،۲۰۱۸).

نتیجه گیری

تعیین مرز کارآیی سبد دارایی‌ها یکی از موضوعاتی است که سرمایه‌گذاران در دنیای واقعی با آن روبرو هستند. در نظریه پرتفوی مدرن، دارایی به عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود و از واریانس به عنوان معیار ریسک استفاده می‌شود؛ اما این فرضیات در نظر گرفته می‌توانند باعث به وجود آمدن فضای غیرواقعی بر مسئله شوند و نیاز به تعدیل فرضیات مذکور می‌باشد. علی‌رغم محبوبیت مدل

میانگین-واریانس مارکُویتز، این مدل در عمل دارای محدودیت‌ها و نقاط ضعفی است؛ بنابراین از نقطه نظر کاربردی، اگرچه ممکن است مدل مارکُویتز بسیار اساسی در نظر گرفته شود، اما به دلیل نقاط ضعفی که در این مدل وجود دارد، توسعه مدل مارکُویتز در دنیای مالی ضروری به نظر می‌رسد. تعیین مرز کارآیی میانگین-واریانس، یعنی بهینه‌سازی که در بین پارامترهای یک تابع به دنبال مقادیری باشیم که تابع را کمینه یا بیشینه نماید. هدف از بهینه‌سازی، یافتن بهترین جواب قابل قبول با توجه به محدودیت‌ها و نیازهای مسأله است. آن چیزی که شرایط را در حل مسایل دشوار می‌کند وجود عدم قطعیت در مسایل است. از آنجا که هدف از بهینه‌سازی تعیین مرز کارآیی بهینه به گونه‌ای که تابع هدف کمینه یا بیشینه شود؛ بنابراین درک بازده و ریسک مسأله مربوط به در نظر گرفتن بازده سهم به عنوان یک متغیر در فضای عدم قطعیت است که جای خالی درک فازی گونه متعیرهای تصمیم در تعیین مرز کارآیی حس شده و نیاز به این است که بازده و ریسک سهام به شکل کارآتری مدل شود. از طرفی مطالعات تجربی نشان می‌دهد که بازده دارایی ها نرمال و متقارن نمی‌باشد. بنابراین، معیار واریانس نمی‌تواند به خوبی نمایانگر ریسک پرتفوی سبد سهام باشد؛ لذا می‌بایست از معیارهای ریسک نامطلوب برای مدل کردن ریسک سبد سهام استفاده کرد. یکی از رویکردهایی که در این زمینه می‌توان به کار برد استفاده از تئوری امکان و استفاده از این تئوری در تعیین وجود عدم قطعیت می‌باشد.

عدم قطعیت را می‌توان عدم اطلاع کامل درباره رخدادهای آینده توصیف کرد که می‌توان با جمع آوری اطلاعات آن را کم کرد؛ اما نمی‌توان آن را حذف نمود. در شرایط واقعی وضعیت‌هایی رخ می‌دهد که مدل‌های ریاضی شامل تنها یک هدف، بیانگر خواسته‌های مورد نظر تصمیم‌گیرنده نبوده و این امر کارآیی و مطلوبیت نتایج حاصل از مدل را کاهش می‌دهد. هم‌چنین در شرایط واقعی پارامترها و عوامل مختلف شامل عدم قطعیت هستند که این امر موجب بروز پیچیدگی‌های فراوانی در تصمیم‌گیری شده است. بنابراین برای برطرف کردن این مشکلات احتمالی، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه تحت تئوری امکان مطرح شده است. نظریه امکان، به صورت یک فضا بخشی از علم ریاضیات است که می‌کوشد با استفاده از طراحی و تحلیل سناریو، رفتارها و نتایج تصمیم‌گیری موجوداتی را که حق انتخاب دارند، در تعامل با یکدیگر پیش‌بینی کند. نظریه امکان می‌کوشد تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک (تضارب منافع) را مدل‌سازی کند. این موقعیت، زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک انتخاب وابسته به راه بردهایی است که دیگران در بازارها انتخاب می‌کنند.

هدف نهایی این روش استخراج مرز کارآیی، یافتن راهبرد بهینه برای سرمایه‌گذاران است. نظریه امکان که در بستر علم اقتصاد توسعه یافته به مطالعه رفتار راهبردی بین عوامل عقلانی می‌پردازد. رفتار

راهبردی، زمانی بروز می‌کند که مطلوبیت هرعامل، نه فقط به راهبرد انتخاب شده توسط خود وی بلکه با راهبرد انتخاب شده توسط بازیگران دیگر همبستگی داشته باشد. تعیین مرز کارآیی تحت تئوری امکان، بهینه سازی فازی یا پارامترهای فازی است یا ضرائب فازی در قیود یا تابع هدف استفاده شده است یا حتی ممکن است با قطعیت کامل دنبال کمینه کردن یا بیشینه‌کردن تابع هدف نباشیم به طوری که محتوی تعیین مرز کارآیی میانگین- واریانس را می توان این گونه بیان کرد که در تحلیل پیشامدها و شرایط محیطی یک انتخاب سهام تنها به دنبال رخدادهای محتمل نیستیم و در سازه‌های نامطمئن در پی یافتن تمامی پیشامدهای امکان‌پذیری هستیم که با درجه امکان این پیشامدها و درجه امکان پیشامدهای متناقض تبیین می‌شوند.

منابع

۱) بیات، علی؛ اسدی، لیدا(۱۳۹۶) بهینه سازی پرتفوی سهام: سودمندی الگوریتم پرندگان و مدل مارکویتز.مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار شماره۳۲.ص۶۳-۸۵.

۲) تقی زاده یزدی، محمد رضا؛ فلاح پور، سعید؛ احمدی مقدم،محمد(۱۳۹۵). انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از برنامه ریزی فرا آرمانی و برنامه ریزی آرمانی ترتیبی توسه یافته. فصلنامه تحقیقات مالی، شماره ۴.ص۶۱۲-۵۹۱.

۳) رامتین نیا، شاهین؛ عطرچی، رومینا.(۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبدسهام بااستفاده‌ازالگوریتم تکامل تفاضلی و رویکرد ارزش در معرض ریسک مشروط مجله دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، شماره ۴۰. ص.۲۵-۳۶.

۴) رهنمای رودپشتی،فریدون؛ نیکو مرام، هاشم؛ طلوعی اشلقی،عباس؛ حسین زاده لطفی، فرهاد؛ بیات مرضیه(۱۳۹۴). بررسی کارایی بهینه سازی پرتفوی بر اساس مدل پایدار با بهینه سازی کلاسیک در پیش بینی ریسک و بازده پرتفوی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار شماره ۲۲ص۲۹-۵۹.

۵) فلاح پور، سعید؛ تندنویس فرید(۱۳۹۳). کاربرد مدل پایدار در انتخاب پرتفوی بهینه سهام. فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه گذاری شماره ۱۰.ص۶۷-۸۴.

۶) مشایخ،شهناز؛ اسفندی، خدیجه(۱۳۹۴). ارزیابی و مقایسه کارآیی مدلهای قیمت گذاری داراییها با استفاده ازمعیارهای متفاوت تشکیل‌پرتفوی. فصلنامه‌علمی‌پژوهشی‌حسابداری مالی،شماره۲۶ ص.۵۲-۸۱.

7) Carlsson, C., Fullér, R. (۲۰۰۱). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems ۱۲۲, ۳۱۵–۳۲۶.

8) Chen, I- F., Tsaur, R–C. , (2016) Fuzzy portfolio selection using a weighted function of possibilistic mean and variance in business cycles, International Journal of Fuzzy Systems 18, 151- 159.

9) chen.W.(2015) Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem.Physica A. 429 ,125-139.

10) Dai, Z., Wang,F.(2019). Sparse and robust mean–variance portfolio optimizationproblems, Physica A 523, 1371–1378.

11) fulga, c.(2016) Portfolio optimization under loss aversion, European Journal of Operational 251, 310-322.

12) Georgescu, I., Kinnunen, J. (2011). Credibility measures in portfolio analysis: From possibilistic to probabilistic models, Journal of Applied Operational Research, 3, 91-102.

13) Gupta,p., Kumar,M., Anand Saxena,A., (2008) Asset Portfolio Optimization using Fuzzy Mathematical Programming, Information Sciences178, 1734-1755.

14) Hirschberger, M., Qi, Y., Steuer, R.E., (2010) Large-scale MV efficient frontier computation via a procedure of parametric quadratic programming, European Journal of Operational Research 204 ,581–588.
15) Kazemi, A., Shakourloo, A., Alinezhad, A. (2017) A fuzzy goal programming model for efficient portfolio selection, Journal of Optimization in Industrial Engineering 22 ,61-71.
16) Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. European Journal of Operational Research 234, 356-371.
17) Lacagnina, . V ., Pecorella, A., (2006) A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem, Fuzzy Sets and Systems 157 ,1317–1327.
18) Le´on, T., Liem, V., Vercher, E. (2002) Viability of infeasible portfolio selection problems: a fuzzy approach, European Journal of Operational Research 139 ,178–189.
19) Li, B., Zhu, Y., Sun, Y., Aw, G., Teo ,K.L. (2018), Multi-period portfolio selection problem under uncertain environment with bankruptcy constraint, Applid Mathematical. Modelling. 56, 539–550.
20) li,Ting Zhang,W., Xu, W(2013) Fuzzy possibilistic portfolio selection model with VaR constraint and risk-free investment.Economic Modeling 31, 12-17.
21) Lighkouras.k., Metaxiotis.(2018)Muiti- Period mean-varance fuzzy Pprtfolio optimization model with transaction costs. Engineering Applications of Artificial intelligence.67,260-269.
22) Lin, C., Tan, B. Hsieh, . P.J (2005) Application of the fuzzy weighted average in strategic portfolio management, Decision Sciences 36,489–511.
23) Maciel,L., Ballini, R., Gomide,F(2017) An evolving possibilistic fuzzy modeling approach for Value-at-Risk estimation.Applied Soft Computing 60,8230-830.
24) Markowitz, H. (۱۹۵۲). Portfolio selection, Journal of Finance ۷, ۷۷–۹۱.
25) Michaud, R.O(1989) . The Markowitz optimization enigma: is ‘optimized’ optimal? Financial Analysts Journal 45, 31–42.
26) Oberdieck ,R, Efstratios N. Pistikopoulos (2016) Multi-objective optimization with convex quadratic cost functions: A multi-parametric programming approach, Computers& Chemical Engineering 85,36-39.
27) Saboridoa, R. , B. Ruiz, A. ,. Bermúdezc, J. D., Vercher, E., Luque, M. (2016)Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection, Appl. Soft Comput.39, 48-63.
28) Stein, M., Branke, J., Schmeck, H. (2008) Efficient implementation of an active set algorithm for large-scale portfolio selection, Computers & Operations Research 35, 3945–3961.

29) Steuer.R., Yue Qi, Hirschberger ,M.(2011) Comparative issues in large-scale mean–variance efficient frontier computation.Decision Support Systems 51, 250-255.
30) Sun,Y., Grace Aw, Kok Lay Teo, Yanjian Zhu, Xiangyu Wang.(2016). Multi-period Portfolio Optimization Under Probabilistic Risk Measure, Finance Research Letters18, 60-66.

31) Vercher, E., Bermúdez, J.D., Segura, J.V. (۲۰۰۷). Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures, Fuzzy Sets and Systems ۱۵۸, ۷۶۹–۷۸۲.

32) Vercher,E., Bermudez,joseD (2015) Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model. Expert Systems With Applications42, 7121-7131.

33) Wang, X. Xu, W.J. Zhang, W.G. Hu, M.L. (2005) Weighted possibilistic variance of fuzzy number and its application in portfolio theroy, Lecture Notes in Artificial Intelligence 3613, 148–155.
34) Watada., J. (1997) Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making, Tatra Mountains Mathematical Publication 13.219–248.
35) Yue,W., Wang,y(2017) A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios.Physica A: 465, 124-140.

36) Zadeh, L.A. (۱۹۷۸). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems ۱, ۳–۲۸.

37) zhang.g., Yong, w., Liu , J., Wei-Jun Xu. (2012)A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs. European Journal of Operational Research. 222, 341-349.

یادداشت‌ها :

1 Optimization techniques
2 Harry Markowitz
3 Portfolio management
4 Financial school
5 Modern Portfolio Theory
6 Dai& Wang
7 Fulga
8 Gupta
9 Diversification
10 Sun
11 Asymmetric
12 Vercher & Bermudez
13 Sharpe
14 Mousin & Lintner
15 Kolm
16 Parametric approach
17 Steuer&Hirschberger
18 Critical path
19 Michaud
20 Best
21 Stein
22 Hirschberger
23 Oberdieck
24 uncertainty
25 Watada
26 Le´on
27.Lacagnina &Pecorella,
28 Lin
29 Georgescu & Kinnunen
30 Lower and upper possibilistic means and variances
31 Chen & Tsaur
32 Short sale
33 Saboridoa